ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (28/05/2012)

ΘΕΜΑ Α

Α1. σχολικό βιβλίο σελ. 253

Α2. σχολικό βιβλίο σελ. 191

Α3. σχολικό βιβλίο σελ. 258

Α4. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z=x+yi, xy\in\Re$

$(1)\Rightarrow |x+yi-1|^2+|x+yi+1|^2=4\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=4\Leftrightarrow$

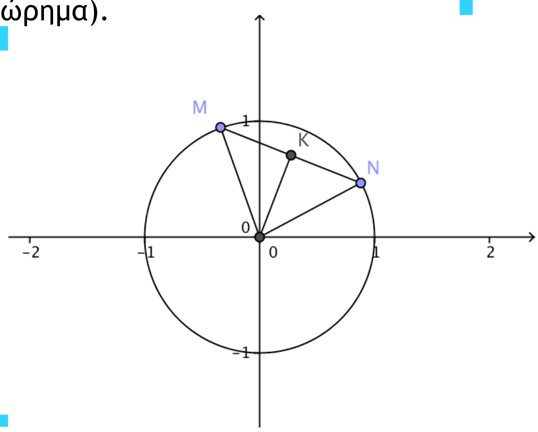
$\Leftrightarrow x^2-2x+1+2y^2+x^2+2x+1=4\Leftrightarrow 2x^2+2y^2=2\Leftrightarrow x^2+y^2=1$, άρα ο γτ των εικόνων των μιγαδικών z στο επίπεδο είναι κύκλος με ακτίνα 1 και κέντρο Ο(0,0).

Β2. Το $|z_1-z_2|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων M_1, M_2 των z_1, z_2 που κινούνται σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ρ=1.

Το τρίγωνο ΟΜΝ είναι ορθογώνιο στο Ο (από πυθαγόρειο θεώρημα).

Αν Κ το μέσο του ΜΝ :

$|z_1+z_2|=\left|\vec{OM}+\vec{ON}\right|=2\left|\vec{OK}\right|\overset{(*)}{=}\sqrt{2}$



* Το ΟΝΜ είναι ισοσκελές, οπότε το ΟΚ εκτός από διάμεσος είναι και ύψος, άρα από πυθαγόρειο στο ΟΚΜ:

$$(OK)^2+(MK)^2=(OM)^2\Leftrightarrow (OK)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (OK)^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow (OK)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Β΄τρόπος : $|z_1-z_2|=\sqrt{2}\Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2\Leftrightarrow (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1=2\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=0$$

οπότε $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1\overset{(1)}{=}2$

Άρα $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$

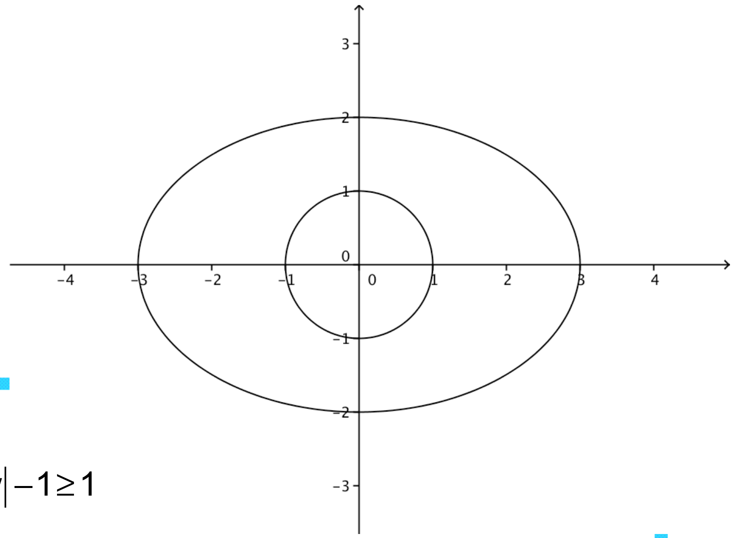
Β3. $(2)\Rightarrow |\alpha+\beta i-5(\alpha-\beta i)|=12\Leftrightarrow |-4\alpha+6\beta i|=12\Leftrightarrow \sqrt{16\alpha^2+36\beta^2}=12\Leftrightarrow 16\alpha^2+36\beta^2=144\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2+9\beta^2=36\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{9}+\frac{\beta^2}{4}=1$$

Άρα ο γτ των εικόνων των μιγαδικών w είναι η έλλειψη $C_2:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Το μέγιστο μέτρο του w αντιστοιχεί στη μέγιστη απόσταση που μπορεί να απέχει ένα σημείο της παραπάνω έλλειψης από την αρχή των αξόνων, η οποία ισούται με την απόσταση (ΟΑ), όπου Α(3,0) η κορυφή του μεγάλου άξονα. Άρα $|w|_{max}=3$.

Το ελάχιστο μέτρο του w αντιστοιχεί στην ελάχιστη απόσταση που μπορεί να απέχει ένα σημείο της παραπάνω έλλειψης από την αρχή των αξόνων, η οποία ισούται με την απόσταση (ΟΒ), όπου Β(0,2) η κορυφή του μικρού άξονα.



Άρα $|w|_{min}=2$.

Β4. $|z-w|_{min}=2-1=1$

$|z-w|_{max}=3+1=4$

Β΄τρόπος: με τριγωνική ανισότητα

Είναι $|z|=1$ και $2\le|w|\le 3$, οπότε:

$$|z-w|\le|z|+|w|\le 1+3=4$$

$$|z-w|\ge\big||z|-|w|\big|=\big||w|-|z|\big|=\big||w|-1\big|=|w|-1\ge 1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1-\frac{1}{x}$$

Είναι $f'(1)=0$ και $f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ αφού x>0, άρα η x=1 μοναδική ρίζα της $f'(x)$

Για x>1 $\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$

Για x<1 $\overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
f(x)	*γν. φθίνουσα*		*Γν.αύξουσα*

ΕΛΑΧ.
f(1)=−1

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο (0,1]

Στο διάστημα (0,1] η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών

$$\Sigma_1=f((0,1])=\left[f(1),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)=[-1,+\infty)$$

εφόσον $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left((x-1)\cdot\ln x-1\right)=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

Ομοίως, η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα έχει σύνολο τιμών

$$\Sigma_2=f([1,+\infty))=\left[f(1),\ \lim_{x\to +\infty} f(x)\right)=[-1,+\infty)$$

εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-1)\cdot\ln x-1\right)=+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Συνεπώς το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1,+\infty)$.

Γ2. $x^{x-1}=\rho^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1}=\ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\cdot\ln x=2013 \Leftrightarrow (x-1)\cdot\ln x-1=2012 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x)=2012$$

Παρατηρούμε ότι $f(1)=-1\neq 2012$

Το $2012\in\Sigma_1=[-1,+\infty)$ άρα υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=2012$

Το $2012\in\Sigma_2=[-1,+\infty)$ άρα υπάρχει $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=2012$

Τα x_1, x_2 είναι μοναδικά αφού η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα (0,1) και $(1,+\infty)$.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x\cdot(f(x)-2012)$, η οποία είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $h'(x)=e^x\cdot(f(x)-2012)+e^x\cdot f'(x)$. Επίσης,

$h(x_1)=e^{x_1}\cdot(f(x_1)-2012)=0$ διότι $f(x_1)=2012$

$h(x_2)=e^{x_2}\cdot(f(x_2)-2012)=0$ διότι $f(x_2)=2012$

Άρα, από θεώρημα Rolle , υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0)=0\Leftrightarrow$

$$e^{x_0}\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\cdot f(x_0)=2012\cdot e^{x_0} \overset{e^{x_0}\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

Β΄τρόπος: Έστω $\varphi(x)=f'(x)+f(x)-2012$, $x\in[x_1,x_2]$

Η φ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών

$\varphi(x_1)=f'(x_1)+f(x_1)-2012=f'(x_1)<0$, αφού $x_1<1$ οπότε $f'(x_1)<0$ {βλ.πινακάκι στο Γ1}

$\varphi(x_2)=f'(x_2)+f(x_2)-2012=f'(x_2)>0$, αφού $x_2>1$ οπότε $f'(x_1)>0$ {βλ.πινακάκι στο Γ1}

οπότε $\varphi(x_1)\varphi(x_2)<0$, άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_o)=0$

Γ4. Είναι $g(x)=(x-1)\cdot\ln x$

Από το ερώτημα Γ1, το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1,+\infty)$, οπότε

$$f(x)\geq -1\Leftrightarrow f(x)+1\geq 0\Leftrightarrow g(x)\geq 0$$

$g(x)=0\Leftrightarrow (x-1)\cdot\ln x=0\Leftrightarrow x=1$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega)=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e (x-1)\cdot\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\cdot\ln x dx=$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\left(\frac{e}{4}-e\right)+\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e-\frac{3}{4}=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \dfrac{x-x^2}{e} \Leftrightarrow e\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - x + x^2 \geq 0$

Έστω g(x)= $= e\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - x + x^2$. Παρατηρούμε ότι g(1)=0.

Άρα έχουμε g(x)≥g(1), οπότε στο 1 η g έχει ελάχιστο.

Η g είναι παραγωγίσιμη, διότι:

f συνεχής και x^2-x+1 συνεχής ως πολυωνυμική, οπότε $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt$ παραγωγίσιμη

$-x+x^2$ παραγωγίσιμη και συνεχής ως πολυωνυμική

$g'(x) = e\cdot f(x^2 - x + 1)\cdot(2x-1) + 2x - 1$

Άρα (Fermat) g΄(1)=0. Άρα $ef(1)\cdot(2-1)+1=0 \Leftrightarrow f(1) = \dfrac{-1}{e}$

- Αφού f συνεχής στο (0,+∞) και f(x)≠0 για κάθε x>0, η f διατηρεί πρόσημο στο (0,+∞). Όμως f(1)<0, οπότε $f(x)<0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$

- Από τη 3η σχέση της εκφώνησης έχουμε: $\ln x - x = \left(\int_1^x \dfrac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)f(x) \qquad (1)$

Έστω d(x)=lnx - x με $d'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

d(x)=0 ⇔ x=1

x	0	1	+∞
d΄(x)	+	0	−
d(x)	γν. αύξουσα	ΜΕΓ. d(1)=-1	γν. φθίνουσα

Άρα, d(x)≤-1 < 0

Αν H(x)=$\dfrac{\ln x - x}{f(x)}$, η (1) γράφεται: d(x)=$\left(\int_1^x H(t)dt + e\right)f(x)$, οπότε $\left(\int_1^x H(t)dt + e\right)f(x) < 0$

Όμως f(x)< 0, άρα $\int_1^x H(t)dt + e > 0$ και από την (1) έχουμε $f(x) = \dfrac{\ln x - x}{\int_1^x H(t)dt + e} \qquad (2)$

Η συνάρτηση H(t) είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, άρα η $\int_1^x \dfrac{\ln t - t}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη. Επίσης, η lnx - x είναι παραγωγίσιμη, άρα, από την (2) έχουμε ότι η f(x) είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Από την (1) : $\dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{\ln x - x}{f(x)}\cdot f(x) + \left(\int_1^x \dfrac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot f'(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x - x + \dfrac{\ln x - x}{f(x)}\cdot f'(x) \overset{\ln x - x \neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x - x} = 1 + \dfrac{f'(x)}{f(x)} \quad \Leftrightarrow \left(\ln|\ln x - x|\right)' = (x)' + \left(\ln|f(x)|\right)'$

Άρα $\ln|\ln x - x| = x + \ln|f(x)| + c \qquad (2)$

για x=1 $\ln|\ln 1 - 1| = 1 + \ln|f(1)| + c \Leftrightarrow 0 = 1 + \ln e^{-1} + c \Leftrightarrow c = -1 - \ln e^{-1} \Leftrightarrow c = -1 + \ln e \Leftrightarrow c = 0$

Οπότε (2) $\Rightarrow \ln|\ln x - x| = x + \ln|f(x)|$. Όμως f(x)< 0 & lnx-x = d(x) < 0, οπότε:

$\ln(x-\ln x) = x + \ln(-f(x)) \Leftrightarrow \ln(-f(x)) = \ln(x-\ln x) - x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(-f(x)) = \ln(x-\ln x) - \ln e^x \Leftrightarrow \ln(-f(x)) = \ln\left(\dfrac{x-\ln x}{e^x}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -f(x) = \dfrac{x-\ln x}{e^x} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\ln x - x}{e^x} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$

Δ2. $f^2(x)\,\eta\mu\dfrac{1}{f(x)} - f(x) = f^2(x)\left[\eta\mu\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(x)}\right] = \dfrac{\eta\mu\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f^2(x)}}$

Θέτουμε $u = \dfrac{1}{f(x)}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^{-x}(\ln x - x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{\ln x - x} = 0$, διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}$ (lnx-x)=-∞

οπότε: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2\,\eta\mu\dfrac{1}{f(x)} - f(x)\right] = \lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{\eta\mu u - u}{u^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = 0$

Δ3. Αφού f συνεχής στο (0,+∞), η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$

$F''(x) = f'(x) > 0$ διότι $f'(x) = -e^{-x}(\ln x - x) + e^{-x}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = -e^{-x}\left(\underbrace{\ln x - x + 1}_{\le 0} - \dfrac{1}{x}\right) > 0$

Η συνάρτηση F είναι συνεχής στα διαστήματα [x,2x] & [2x,3x] και παραγωγίσιμη στα (x,2x), (2x,3x), οπότε εφαρμόζοντας ΘΜΤ έχουμε:

- Υπάρχει $\xi_1 \in (x,2x) : F'(\xi_1) = \dfrac{F(2x) - F(x)}{x}$
- Υπάρχει $\xi_2 \in (2x,3x) : F'(\xi_2) = \dfrac{F(3x) - F(2x)}{x}$

Όμως $\xi_1 < \xi_2 \overset{F'\uparrow}{\Rightarrow} F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Rightarrow \dfrac{F(2x) - F(x)}{x} < \dfrac{F(3x) - F(2x)}{x} \overset{x>0}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Rightarrow 2F(2x) < F(x) + F(3x)$ για κάθε x>0

Δ4. Έστω $G(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$

- $G(\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$, διότι $\beta < 3\beta$ και $F\downarrow$ $(F'(x) = f(x) < 0)$ οπότε $F(\beta) > F(3\beta)$

  και $G(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$ (από Δ3 για x=β), άρα $G(\beta)\cdot G(2\beta) < 0$

- G συνεχής στο [β,2β], διότι η F είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη)

Άρα (Bolzano) υπάρχει $\xi \in (\beta,2\beta) : G(\xi) = 0$

Επίσης, $G'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0$ άρα G γν. φθίνουσα

Οπότε υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta,2\beta)$ τέτοιο ώστε $G(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$