ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ & ΕΠΑΛ (Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

(27/05/2013)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 334-335

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 246

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 222

Α4. α)Λ β)Σ γ)Σ δ)Λ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2$

$|z - 2|^2 + |z - 2| - 2 = 0$

$|z - 2| = 1$ ή $|z - 2| = -2$

Κύκλος με κέντρο Κ(2, 0) και ρ=1 — Απορρίπτεται

Β2. Αφού $|Im(z_1) - Im(z_2)| = 2 = 2ρ$, οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = 2 - i$ (ή αντίστροφα) με εικόνες Γ, Δ. Επομένως,

$$z_1 + z_2 = β \Leftrightarrow 2 + i + 2 - i = β \Leftrightarrow β = 4$$

και

$$z_1 z_2 = γ \Leftrightarrow (2 + i)(2 - i) = γ \Leftrightarrow γ = 5$$

Β3. Αφού οι μιγαδικοί $α_0$, $α_1$, $α_2$ ανήκουν στον κύκλο του ερωτήματος Β1, ισχύει ότι

$$|α_0| \leq 3\ ,\ |α_1| \leq 3\ ,\ |α_2| \leq 3$$

Από τη σχέση της εκφώνησης προκύπτει:

$v^3 = -(α_2 v^2 + α_1 v + α_0)$

οπότε

$$|v|^3 = |α_2 v^2 + α_1 v + α_0| \leq |α_2||v|^2 + |α_1||v| + |α_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3$$

δηλαδή

$$|v|^3 \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι $|v| \geq 4$ (2).

Τότε

$$|v|^3 = |v^2| \cdot |v| \geq 4|v|^2 = 3|v|^2 + |v|^2 \overset{(2)}{\geq} 3|v|^2 + 4|v| = 3|v|^2 + 3|v| + |v| \overset{(2)}{\geq} 3|v|^2 + 3|v| + 4$$

που είναι άτοπο, λόγω της (1).

__Β΄τρόπος__

Έστω $|v| = x$. Τότε $(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 3x - 3 \leq 0$. Με σχήμα Horner:

1	-3	-3	-3	4
↓	4	4	4	
1	1	1	1	

$$(x-4)\cdot\left(x^2+x+1\right)+1\le 0$$
$$(x-4)\left(x^2+x+1\right)<-1$$
δηλ. $(x-4)\underbrace{\left(x^2+x+1\right)}_{\substack{\downarrow\\ \text{θετικό}\\ (\Delta<0)}}<0$

άρα $x-4<0 \Leftrightarrow x<4$

$|v|<4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $(f(x)+x)\cdot(f'(x)+1)=x$

$$f(x)\cdot f'(x)+f(x)+x\cdot f'(x)+x=x$$
$$f(x)\cdot f'(x)+(x)'\cdot f(x)+x\cdot f'(x)=0$$
$$\left(\frac{f^2(x)}{2}+x\cdot f(x)\right)'=0$$
$$\frac{f^2(x)}{2}+x\cdot f(x)=c \xrightarrow{f(0)=1} \frac{1}{2}+0=c\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

άρα

$$\frac{f^2(x)}{2}+x\cdot f(x)=\frac{1}{2}$$
$$f^2(x)+2x\cdot f(x)-1=0$$
$$f^2(x)+2xf(x)+x^2=x^2+1$$
$$\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1 \quad (1)$$

Έστω $h(x)=x^2+1$. Είναι h(x)>0, δηλαδή $h(x)\neq 0$ οπότε $h^2(x)\neq 0$. Επίσης, η συνάρτηση $h^2(x)$ είναι συνεχής, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Έτσι, από την (1) προκύπτει:

$f(x)+x=\sqrt{x^2+1}$ ή $f(x)+x=-\sqrt{x^2+1}$

$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ Απορρίπτεται, αφού f(0)=1

Γ2. Για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0 \quad \text{διότι} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}<1\Leftrightarrow x<\sqrt{x^2+1} \quad (2)$$

- αν $x<0$ η (2) ισχύει
- αν $x\ge 0$ η $(2)\Rightarrow x^2<x^2+1\Leftrightarrow 0<1$ ισχύει

άρα f΄(x)<0 για κάθε $x\in R$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1-1

Έτσι, έχουμε:

$$f(g(x))=1$$
$$f\left(g(x)\right)=f(0)$$
$$g(x)=0 \quad \text{αφού f 1-1}$$

Είναι $g'(x)=3x^2+3x=3x\left(x+1\right)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad ή \quad x=-1$

Οπότε η g έχει τον εξής πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			τ.μ.		τ.ε.		
			$g(-1)=-\frac{1}{2}$		$g(0)=-1$		

- στο $(-\infty,-1]$ η $g\uparrow$ και συνεχής:

  $g((-\infty,-1])=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x),g(-1)\right]=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

  αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+\frac{3x^2}{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$

  το $0\notin\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\Rightarrow$ η g δεν έχει ρίζα στο $(-\infty,-1]$

- στο [-1,0] η g $\downarrow$ και συνεχής:

  $g([-1,0])=[g(0),g(-1)]=\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

  το $0\notin\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\Rightarrow$ η g δεν έχει ρίζα στο $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

- στο $[0,+\infty]$ η g $\uparrow$ και συνεχής

  $g\left(\left[0,+\infty\right)\right)=\left[g(0),\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right)=\left[-1,+\infty\right)$

  αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+\frac{3x^2}{2}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$

  το $0\in\left[-1,+\infty\right)\Rightarrow$ η g έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left[0,+\infty\right)$ (αφού είναι γν. αύξουσα)

Γ3. $\int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f\left(t\right)dt=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)εφx \Leftrightarrow \int_{x-\frac{1}{4}}^{0} f(t)dt=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{ημx}{συνx} \Leftrightarrow συνx\cdot\int_{x-\frac{1}{4}}^{0} f(t)dt=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot ημx$

$\Leftrightarrow f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot ημx+συνx\cdot\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt=0 \Leftrightarrow \left(ημx\cdot\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt\right)'=0$

Έστω $F(x)=ημx\cdot\int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$

η F είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων:

- ημx συνεχής και παραγωγίσιμη
- $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ συνεχής διότι η f συνεχής και $x-\frac{\pi}{4}$ συνεχής άρα $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(1)dt$ παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής

$$F(0)=\eta\mu 0\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt=0$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\int_0^{6} f(t)dt=0$$

Άρα από θεώρημα Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(x_0)=0\Leftrightarrow f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\eta\mu x_0+\sigma\upsilon\nu x_0\cdot\int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)dt=0\Leftrightarrow\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon\varphi x_0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}\right]\overset{(*)}{=}5f'(1)-(-f'(1))=6\cdot f'(1)$

Άρα $6\cdot f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0$

(*) Θέτουμε $5h=\omega$, $\lim\limits_{h\to 0}\omega=\lim\limits_{h\to 0}(5h)=0$

οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{f(1+\omega)-f(1)}{\frac{\omega}{5}}=5\cdot f'(1)$

και $-h=u$, $\lim\limits_{h\to 0}u=\lim\limits_{h\to 0}(-h)=0$

οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{-u}=-f'(1)$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε το 1 είναι η μοναδική ρίζα.

Για $x>1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$

Για $x<1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$, το f(1)=1 (από εκφώνηση)

Δ2. Από Δ1 έχουμε $f(x)\geq 1$ (ισχύει το = μόνο για $x=1$)

Η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) οπότε η συνάρτηση $h(t)=\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής (πράξεις συνεχών , t-1: συνεχής ως πολυωνυμική)

Άρα η $g(x)=\int_\alpha^x h(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=h(x)$

δηλ. $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}>0$ στο $(1,+\infty)$ άρα η g $\uparrow$ στο $(1,+\infty)$

Έστω $\varphi(x)=\int_{x}^{x+1} g(u)du,\ x>1$

$$\varphi(x)=\int_{c}^{x+1} g(u)du-\int_{c}^{x} g(u)du$$

g συνεχής (ως παραγωγίσιμη), x, x+1 συνεχείς, άρα $\varphi(x)$ παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x)=g(x+1)-g(x)>0$$

διότι $x<x+1 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)<g(x+1)$

Άρα φ γνησίως αύξουσα.

Έτσι, έχουμε:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \Leftrightarrow \varphi(8x^2+5)>\varphi(2x^4+5) \quad (1)$$

Όμως $\varphi\uparrow$ άρα αντιστρέψιμη και η $\varphi^{-1}\uparrow$ (απόδειξη)

οπότε η (1) $\Leftrightarrow 8x^2+5>2x^4+5 \Leftrightarrow 8x^2-2x^4>0 \Leftrightarrow 4x^2-x^4>0 \Leftrightarrow x^2\cdot(4-x^2)>0$

$x\in(-2,0)\cup(0,2)$

Δ3. $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

$$g''(x)=\frac{f'(x)\cdot(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε x>1 ισχύει $f'(x)(x-1)-(f(x)-1)>0$ (2)

Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f στο $[1,x]$:

η f είναι συνεχής στο [1,x] και παραγωγίσιμη στο (1,x) οπότε υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x)-1}{x-1}$$

Άρα η (2) ισοδύναμα γράφεται:

$f'(x)\cdot(x-1)-(x-1)\cdot f'(\xi)>0 \Leftrightarrow (x-1)[f'(x)-f'(\xi)]>0$ που ισχύει, διότι

$x>1\Leftrightarrow x-1>0$ και $\xi<x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(x)$

Άρα $g''(x)>0$, οπότε g κυρτή στο $(1,+\infty)$

Επίσης, είναι g(α)=0 και $g'(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$ οπότε η εφαπτομένη της C_g στο $M(\alpha,g(\alpha))$ έχει εξίσωση:

$$\varepsilon:\ y-g(\alpha)=g'(\alpha)\cdot(x-\alpha)$$

$$y=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha)$$

Αφού g κυρτή ισχύει $g(x)\geq\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha)$ και η ισότητα $g(x)=\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha)$

$\Leftrightarrow(\alpha-1)\cdot g(x)=(f(\alpha)-1)(x-\alpha)$ να ισχύει μόνο για $x=\alpha$ (στο σημείο επαφής)

Β΄ τρόπος

$$(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(\alpha)-1)\cdot(x-\alpha) \qquad (x>1)$$

$$(\alpha-1)g(x)-(f(\alpha)-1)(x-\alpha)=0 \qquad (1)$$

Έστω $\sigma(x)=(\alpha-1)g(x)-(f(\alpha)-1)\cdot(x-\alpha)$

Παρατηρούμε ότι $\sigma(\alpha)=(\alpha-1)g(\alpha)-(f(\alpha)-1)(\alpha-\alpha)=0$

άρα το $x=\alpha$ είναι μία ρίζα της σ, οπότε η εξίσωση (1) έχει λύση το $x=\alpha$.

$$\sigma'(x)=(\alpha-1)g'(x)-(f(\alpha)-1)=(\alpha-1)\left[\frac{f(x)-1}{x-1}-\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\right]=(\alpha-1)\cdot\left[g'(x)-g'(\alpha)\right]$$

$\sigma'(\alpha)=0$

- για $x>\alpha \Rightarrow g'(x)>g'(\alpha)$, αφού $g'\uparrow$ (g κυρτή). Άρα $\sigma'(x)>0$
- για $x<\alpha \Rightarrow g'(x)<g'(\alpha) \Rightarrow \sigma'(x)<0$

Δηλαδή η σ έχει ελάχιστο το σ(α)=0.

Άρα η $\sigma(x)>0$ για $x\in(1,\alpha)\cup(\alpha,+\infty)$ οπότε η x=α είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης.