ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (06/06/2022)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ.186

Α2. Σχολικό σελ.142

Α3. Σχολικό σελ.161

Α4.

α) Σωστό (σελ.67)

β) Σωστό (σελ.128)

γ) Σωστό (σελ.114)

δ) Λάθος (σελ.53)

ε) Λάθος (σελ.214)

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_h = D_{fog} = \left\{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \left[0,+\infty\right) / \sqrt{x} \le 1\right\} = \left\{x \in \left[0,+\infty\right) / x \le 1\right\} = \left[0,1\right]$

$h(x) = \left(f \circ g\right)(x) = f\left(g(x)\right) = g^4(x) - 2g^2(x) + 1 = \left(\sqrt{x}\right)^4 - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = \left(x-1\right)^2$

Β2. $h'(x) = 2\left(x-1\right)\left(x-1\right)' = 2\left(x-1\right) < 0$ για κάθε $x \in \left(0,1\right)$

Επίσης, h(x) = $\left(x-1\right)^2$ συνεχής στο $\left[0,1\right]$ ως πολ/κη.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε και 1-1, στο $\left[0,1\right]$.

- $h(x) = y \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 = y \overset{y\ge 0}{\Leftrightarrow} \left|x-1\right| = \sqrt{y} \overset{x\in\left[0,1\right]}{\Leftrightarrow} -x+1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{y}$

  $x \in \left[0,1\right] \Rightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le -\sqrt{y}+1 \le 1 \Rightarrow -1 \le -\sqrt{y} \le 0 \Rightarrow 1 \ge \sqrt{y} \ge 0$

  Άρα $y \le 1$

Οπότε έχουμε $h^{-1}(y) = 1-\sqrt{y}$ με y$\in\left[0,1\right]$ δηλαδή $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}$ με x$\in\left[0,1\right]$

Β3. i) $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ και $\varphi(0) = \frac{h^{-1}(0)}{1-0} = 1$, οπότε $\varphi(0) \ne \varphi(1)$

για $x \in \left[0,1\right)$ έχουμε $\varphi(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$: συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων …

Στο $x_0 = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1-x}{\left(1-x\right)\left(1+\sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$

Άρα η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$.

Συνεπώς για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Ε.Τ στο $[0,1]$.

ii) Για $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, αφού g(x)= ημ(x) γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1\Rightarrow\varphi(1)<\eta\mu\alpha<\varphi(0)$$

Άρα (από Θ.Ε.Τ- (i) ερώτημα) έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_o)=\eta\mu\alpha$

ΘΕΜΑ Γ

f(0)=0

Γ1.

- Για x > -1 : $f'(x)=3x^2-1$ άρα $f(x)=x^3-x+c$, $c\in R$

  Για x = 0 : $f(0)=c\Leftrightarrow c=0$, οπότε $f(x)=x^3-x$
- Για x < -1 : $f'(x)=-2$ άρα $f(x)=-2x+k$, $k\in R$

  Όμως f συνεχής στο -1 άρα

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^-}f(x)=f(-1)\Rightarrow\lim_{x\to-1^+}\left(x^3-x\right)=2+k=f(-1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-1+1=2+k=f(-1)\Rightarrow k=-2, f(-1)=0$$

Άρα $f(x)=-2x-2$ για $x\leq-1$

Έτσι, $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\leq-1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$

Γ2. $f(x)=x^3-x$, για x > -1

$f'(x)=3x^2-1$

Η εφαπτομένη είναι:

ε : $y-f(x_o)=f'(x_o)\cdot(x-x_o)$ (1)

Αφού τέμνει τον y΄y στο -2 έχουμε (για x = 0, y = -2) :

$$-2-f(x_o)=f'(x_o)\cdot(0-x_o)\Rightarrow-2-x_o^3+x_o=-x_o\cdot\left(3x_o^2-1\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-2-x_o^3+x_o=-3x_o^3+x_o\Rightarrow2x_o^3=2\Rightarrow x_o^3=1\Rightarrow x_o=1$$

Τότε $f(x_o)=f(1)=0$ και $f'(x_o)=f'(1)=3-1=2$

Οπότε από την (1) έχουμε :

ε : $y-0=2\cdot(x-1)\Rightarrow y=2x-2$

Γ3. Γ(2,0), M(x,y), K(x,0) με x > 2

$x(t_o)=3$, $y(t_o)=4$

$x'(t_o)=2$ μον/δευτ

Το τρίγωνο ΚΓΜ είναι ορθογώνιο (με ορθή τη γωνία Κ) οπότε

$$\mathrm{E}=(\mathrm{K\Gamma M})=\frac{1}{2}(\mathrm{K\Gamma})\cdot(\mathrm{MK})=\frac{1}{2}(x-2)y=\frac{1}{2}(x-2)(2x-2)=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2$$

Έτσι έχουμε:

$$E(t)=x^2(t)-3x(t)+2$$

$$E'(t)=2x(t)\cdot x'(t)-3x'(t)$$

Για $t=t_o$: $E'(t_O)=2x(t_O)\cdot x'(t_o)-3x'(t_o)=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2=6$ τετρ.μον/δευτ

Γ4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^{3.}}\right]=L$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2}=L_1$

  Θέτουμε u = -2x -2. Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2)=+\infty$

  $L_1=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=0$ <u>με απόδειξη</u> (βλ. ΑΡΤΙΟ σελ.79)

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-x)}{1-x^3}=L_2$

  Θέτουμε -x = ω. Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\omega=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ και

  $L_2=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{f(\omega)}{1+\omega^3}=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{\omega^3-\omega}{1+\omega^3}=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{\omega^3}{\omega^3}=1$

Άρα $L=L_1+L_2=0+1=1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f(x)=x-\ln(3x)$, $D_f=(0,+\infty)$

$f'(x)=1-\dfrac{1}{3x}\cdot(3x)'=1-\dfrac{1}{3x}\cdot 3=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x-1>0\Leftrightarrow x>1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

- f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (x, 3x είναι συνεχείς ως πολ/κες, lnx ως λογαριθμική και η ln(3x) ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων)
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x - \ln(3x)\right) = +\infty$ άρα υπάρχει α κοντά στο 0^+ τέτοιο ώστε f(α) > 0

  $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$, αφού 1 = lne και e > 3

  Οπότε $f(\alpha)\cdot f(1) < 0$.

  Επίσης, f συνεχής στο $[\alpha,1]$.

Άρα (Bolzano) η f(x) = 0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα x_1 στο $(\alpha,1) \subseteq (0,1)$.

Η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \ln(3x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x - \ln(3x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{e^x}{3x}\right) = l$

  Θέτουμε $u = \dfrac{e^x}{3x}$. Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{3x} \underset{d'H}{\overset{(*)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(3x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{3} = +\infty$

  Άρα $l = \lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u) = +\infty$, οπότε υπάρχει β κοντά στο $+\infty$ τέτοιο ώστε f(β) > 0.

  Οπότε έχουμε $f(1)\cdot f(\beta) < 0$ και f συνεχής στο [1,β]

Άρα (Bolzano) η f(x) = 0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα x_2 στο $(1,\beta)$, η οποία θα είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
Συνολικά λοιπόν, η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με x_1 < 1 < x_2.

ii) $f''(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε x > 0.

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

Δ2. $E = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx = \int_{x_1}^{x_2}|x - \ln(3x)|dx \overset{*_1}{=} \int_{x_1}^{x_2}\left(-x + \ln(3x)\right)dx = \int_{x_1}^{x_2} -xdx + \int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln 3x dx =$

$$= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} + \left[x\ln(3x)\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x(\ln 3x)'dx = -\frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} + x_2\ln(3x_2) - x_1\ln(3x_1) - \int_{x_1}^{x_2} x\frac{1}{3x}3dx =$$

$$\overset{(*_2)}{=} -\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_1^2}{2}+x_2(x_2)-x_1(x_1)-\int_{x_1}^{x_2}1dx = -\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_1^2}{2}+x_2^2-x_1^2-\left[x\right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$=\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}-\left(x_2-x_1\right)=\frac{x_2^2-x_1^2}{2}-\left(x_2-x_1\right)=\frac{\left(x_2-x_1\right)\left(x_2+x_1\right)}{2}-\left(x_2-x_1\right)=$$

$$=\left(x_2-x_1\right)\left(\frac{x_2+x_1}{2}-1\right)=\left(x_2-x_1\right)\frac{x_2+x_1-2}{2}=\frac{1}{2}\left(x_2-x_1\right)\left(x_2+x_1-2\right) \quad \text{τετρ.μον.}$$

$(*_1)$ $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$

- $x_1 \le x \le 1 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x_1)\ge f(x) \Rightarrow f(x)\le 0$
- $1\le x\le x_2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)\le f(x_2)\Rightarrow f(x)\le 0$

$(*_2)$ από Δ1: $f(x_1)=0 \Leftrightarrow x_1=\ln(3x_1)$, $f(x_2)=0\Leftrightarrow x_2=\ln(3x_2)$

Δ3. από Δ2: $E>0 \overset{x_2>x_1}{\Rightarrow} x_1+x_2-2>0 \Rightarrow 2-x_1<x_2$

Επίσης, $x_1<1<x_2 \Rightarrow -x_1>-1>-x_2 \Rightarrow \underline{2-x_1>1}>1-x_2$

Άρα $1<2-x_1<x_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(2-x_1)<f(x_2) \Rightarrow f(2-x_1)<0$

Δ4. Έστω ότι έχει λύση η εξίσωση:

$$2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)\cdot\left(x-x_2\right) \overset{f(1)=1-\ln 3}{\Leftrightarrow} 2f(x)-f(1)=f'(x_2)\cdot\left(x-x_2\right) \qquad (2)$$

Η εφαπτομένη της Cf στο $M\left(x_2,f(x_2)\right)$ είναι :

$$y-f(x_2)=f'(x_2)\cdot\left(x-x_2\right)\overset{\Delta_1}{\Leftrightarrow} y=f'(x_2)\cdot\left(x-x_2\right)$$

Άρα αφού η f είναι κυρτή, έχουμε :

$f(x)\ge f'\left(x_2\right)\cdot\left(x-x_2\right)$, με την ισότητα να ισχύει για $x=x_2$

Άρα η (2) δίνει :

$f(x)\ge 2f(x)-f(1) \Leftrightarrow f(x)\le f(1)$, με την ισότητα να ισχύει για $x=x_2$

Το οποίο είναι άτοπο (αφού το 1 είναι το ελάχιστο της συνάρτησης f και $x_2\neq 1$).