ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (04/06/2024)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σελ. 76

Α2. σελ. 155

Α3. σελ. 216

Α4.

- **α)** Σ
- **β)** Σ
- **γ)** Λ
- **δ)** Λ
- **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_f = \{x \in R \,/\, x \in D_g \cap D_h \quad και \quad h(x) \neq 0\ \}$

- $D_g = [1, +\infty)$, $D_h = [1, +\infty)$ οπότε $D_g \cap D_h = [1, +\infty)$
- $h(x) \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x \neq 1$

Άρα $D_f = (1, +\infty)$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$D_r = \{x \in R \,/\, x \in D_g \cap D_h\ \} = [1, +\infty)$$

$$r(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}$$

Β2. Η f είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως ρητή και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση οπότε αντιστρέφεται.

- $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = x \cdot y - y \Leftrightarrow x - x \cdot y = -y - 1 \Leftrightarrow x(1-y) = -(y+1)$
  $\overset{y \neq 1}{\Leftrightarrow} x = -\dfrac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$

Πρέπει $x \in D_f$ δηλαδή x > 1 $\Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{y+1-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{y-1} > 0$

$\Leftrightarrow y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1$

Άρα $D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$ και $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{y-1}$

Έτσι έχουμε $D_f = D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$ και $f^{-1}(x) = f(x)$ για κάθε x >1, οπότε συμπεραίνουμε $f^{-1} = f$.

Β3. Η συνάρτηση r είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (η x είναι συνεχής ως πολ/κη και η $\dfrac{1}{x}$ ως ρητή), οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{r(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$, αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ άρα $\lambda = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[r(x) - \lambda(x)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \dfrac{1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-1}{x}\right) = 0$ άρα $\beta = 0$

Οπότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta \Rightarrow y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_r στο $+\infty$.

Β4. $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4 \cdot r(x)$ **(1)**

Περιορισμοί : $x \in D_r \Rightarrow x \geq 1$

$x \in D_f \Rightarrow x > 1$

$f(x) \in D_{f^{-1}} \Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} > 1 \overset{(B2)}{\Rightarrow} x > 1$

Άρα πρέπει $x \in (1, +\infty)$

Έχουμε : (1)

$\Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$

$x - 4 = 0$ ή $x^2 - 1 = 0$

$x = 4$ ή $x = 1$ ή $x = -1$

Δεκτή απορ. απορ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ έχουμε :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right) = -4+8-3+\lambda$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda} = 1+\lambda \Leftrightarrow e^{\lambda} - 1 - \lambda = 0 \qquad (1)$$

Έστω $\varphi(x) = e^x - 1 - x, \quad D_\varphi = R$

Η φ είναι συνεχής στο R ως διαφορά εκθετικής και πολυωνυμικής και παραγωγίσιμη με $\varphi'(x) = e^x - 1$.

Έχουμε : $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ δηλαδή η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ δηλαδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty.0]$.

Άρα το x = 0 είναι θέση ελαχίστου για τη φ με $\varphi(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$, δηλαδή $\varphi(x) \geq \varphi(0)$ για κάθε $x \in R$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0.

Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση τη λ = 0.

Γ2. Για λ = 0 : $f(x) = \begin{cases} -2x+5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2+4x-3, & x \geq 2 \end{cases}$

- Για $x \in [0,2): f(x) = -2x+5$ συνεχής ως πολ/κη και παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2 < 0$ οπότε έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2)$.
- Για $x \in (2,+\infty): f(x) = -x^2+4x-3$ συνεχής ως πολ/κη και παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x+4 = -2(x-2) < 0$ για κάθε $x \in (2,+\infty)$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.
- Στο $x_0 = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(-x+2)}{(x-2)} = 0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$ και στο $[2,+\infty)$ και συνεχής στο $x_0 = 2$, άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο το 5 (για x = 0).

Γ3. i) Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ πρέπει η f να είναι συνεχής στο [0,3] και παραγωγίσιμη στο (0,3). Όμως στο προηγούμενο ερώτημα αποδείξαμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$, οπότε δεν ισχύουν οι υποθέσεις το ΘΜΤ.

ii) $\lambda_{\Delta E} = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{-5}{3}$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\dfrac{5}{3}$ (2)

- για $x \in [0,2)$: $f'(x) = -2$ άρα δεν υπάρχει $\xi \in [0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{5}{3}$
- Για $x \in [2,+\infty)$: $f'(x) = -2x+4$

  Άρα η (2) ισοδύναμα γράφεται : $-2\xi + 4 = \dfrac{-5}{3} \Leftrightarrow -6\xi + 12 = -5 \Leftrightarrow \xi = \dfrac{17}{6}$ δεκτό

  Άρα το ζητούμενο ισχύει για $\xi = \dfrac{17}{6}$.

Γ4. $y'(t)$=0,5 μον/sec και ΟΑ=2, $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{y}{2}$

$\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \dfrac{y(t)}{2}$

Άρα $(\varepsilon\varphi\omega(t))' = \dfrac{1}{2}y'(t) \Rightarrow \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}5 \Rightarrow \omega'(t) = \dfrac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)$ (3)

Τη χρονική στιγμή t_0: $x(t_0) = 2$ και $y(t_0) = 1$, αφού για $f(2) = 1$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα: $x^2(t_0) + y^2(t_0) = \rho^2(t_0)$, όπου $\rho = \mathrm{OM}$

δηλαδή $4 + 1 = \rho^2(t_0)$

$$\rho(t_0) = \sqrt{5}$$

Έτσι, $\sigma\upsilon\nu\omega(t_0) = \dfrac{x(t_0)}{\rho(t_0)} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Άρα (3) $\overset{t=t_0}{\Rightarrow} \omega'(t_0) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \dfrac{1}{5} = 0{,}2\ {}^{rad}/_{sec}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+a\right)x-(\ln x+ax)}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$, $\quad f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow x<e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	↗		↘

ΜΕΓ.

$$f(e)=\frac{1+ae}{e}$$

Όμως, σύμφωνα με το σύνολο τιμών, το μέγιστο της συνάρτησης είναι το $1+\frac{1}{e}$ άρα

$1+\frac{1}{e}=\frac{1+a\cdot e}{e} \Leftrightarrow e+1=1+a\cdot e \Leftrightarrow a=1$

Δ2. Για α = 1 : $f(x)=\frac{\ln x+x}{x}=1+\frac{\ln x}{x}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+x=0 \Leftrightarrow h(x)=0$ όπου $h(x)=\ln x+x$, $\quad x\in(0,+\infty)$

Η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $h'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ για κάθε x > 0

Άρα h γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

- h συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$
- $h\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\ln 2<0$, $\quad h(1)=\ln 1+1=1>0$

  οπότε $h\left(\frac{1}{2}\right)\cdot h(1)<0$

Άρα (Θ. Bolzano) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$, το οποίο

θα είναι μοναδικό αφού h γνησίως μονότονη.

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

Δ3. i) Το x = 4 είναι προφανής λύση της εξίσωσης και ανήκει στο $(e,+\infty)$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 οπότε $f(x)=f(4)\Leftrightarrow x=4$, δηλ. η x=4 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=f(4)$ στο διάστημα $(e,+\infty)$.

Το x = 2 $\in(0,e]$ και επαληθεύει την εξίσωση αφού

$$f(2)=f(4)\Leftrightarrow 1+\frac{\ln 2}{2}=1+\frac{\ln 4}{4}\Leftrightarrow\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 2^2}{4}\Leftrightarrow\frac{\ln 2}{2}=\frac{2\cdot\ln 2}{4}\Leftrightarrow\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 2}{2}\ \text{ ισχύει}$$

και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε και 1-1, έχουμε ότι η x=2 μοναδική λύση της εξίσωσης στο διάστημα αυτό, αφού

$$f(x)=f(4)\Leftrightarrow f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2$$

Άρα η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει ακριβώς 2 λύσεις τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

ii) $2^x\le x^2\Leftrightarrow\ln 2^x\le\ln x^2\Leftrightarrow x\ln 2\le 2\ln x\Leftrightarrow\frac{\ln 2}{2}\le\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow 1+\frac{\ln 2}{2}\le 1+\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow f(2)\le f(x)$

- Για $x\in(0,e]$ αφού f γνησίως αύξουσα τότε έχουμε : $x\ge 2$

  Άρα $x\in[2,e]$

- Για $x\in(e,+\infty)$ αφού f γνησίως φθίνουσα τότε έχουμε : $f(x)\ge f(4)\Leftrightarrow x\le 4$

  Άρα $x\in(e,4]$

Άρα $2^x\le x^2\Leftrightarrow x\in[2,4]$

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|dx$

$$g(x)=0\Leftrightarrow f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}=0\Leftrightarrow f(e^x)=0\ \text{ ή }\ \underset{\text{απορ.}}{x=1}$$

Από Δ2, έχουμε $f(e^x)=0\Leftrightarrow e^x=x_0\Leftrightarrow x=\ln x_0$, με $\frac{1}{2}<x_0<1$

άρα $\ln\frac{1}{2}<\ln x_0<\ln 1$

$-\ln 2<\ln x_0<0$

- Για $\underline{-\ln 2\le x\le\ln x_0}$ έχουμε (αφού f γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$) :

$$f\left(\frac{1}{2}\right)\le f(e^x)\le f(x_0)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)\le\underline{f(e^x)\le 0}$$

- Για $\underline{\ln x_0 \le x \le 0} \Rightarrow x_0 \le e^x \le 1$ αντίστοιχα έχουμε

$$f(x_0) \le f(e^x) \le f(1) \Leftrightarrow \underline{0 \le f(e^x)} \le f(1)$$

- Επίσης, $\dfrac{1-x}{e^x} > 0$, για κάθε $x \le 0$

Άρα έχουμε : $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln x_0$

$g(x) \le 0$ για κάθε $x \in [-\ln 2, \ln x_0]$

$g(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\ln x_0, 0]$

ΑΡΑ

$$\mathrm{E}(\Omega) = -\int_{-\ln 2}^{\ln x_0} g(x)dx + \int_{\ln x_0}^{0} g(x)dx = -\int_{-\ln 2}^{\ln x_0} f(e^x)\frac{1-x}{e^x}dx + \int_{\ln x_0}^{0} f(e^x)\frac{1-x}{e^x}dx$$

Θέτουμε $\omega = f(e^x)$

Τότε $d\omega = f'(e^x)e^x dx = \dfrac{1-\ln e^x}{(e^x)^2}e^x dx = \dfrac{1-x}{e^x}dx$

Για $x = 0 : \omega = f(e^0) = f(1) = 1$

Για $x = -\ln 2 : \omega = f(e^{-\ln 2}) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 + \dfrac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 + 2\ln 2^{-1} = 1 - 2\ln 2$

Για $x = \ln x_0 : \omega = f(e^{\ln x_0}) = f(x_0) = 0$

Έτσι $\mathrm{E}(\Omega) = -\int_{-\ln 2}^{\ln x_0} g(x)dx + \int_{\ln x_0}^{0} g(x)dx = -\int_{1-2\ln 2}^{0} \omega d\omega + \int_{0}^{1} \omega d\omega =$

$$= -\left[\frac{\omega^2}{2}\right]_{1-2\ln 2}^{0} + \left[\frac{\omega^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\left(0 - \frac{(1-2\ln 2)^2}{2}\right) + \frac{1}{2} - 0 = \frac{(1-2\ln 2)^2 + 1}{2} =$$

$$= \frac{2 - 4\ln 2 + 4\ln^2 2}{2} = 1 - 2\ln 2 + 2\ln^2 2$$ τετραγωνικές μονάδες

Παρατήρηση: Οι απαντήσεις είναι ενδεικτικές.

Στα περισσότερα ερωτήματα υπάρχουν και άλλοι τρόποι