ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (18/05/2016)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 262

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 141

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 246-247

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $D_f=R$

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη, ως ρητή, με:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

Στο $x_0=0$ η f έχει ελάχιστο το f(0)=0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘		↗

ελάχιστο
Α(0,0)

Β2. $$f''(x)=\frac{2\cdot(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2\cdot(x^2+1)\cdot\left[(x^2+1)-4x^2\right]}{(x^2+1)^4}=\frac{2\cdot(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 1-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow 1-3x^2>0 \Leftrightarrow x^2<\frac{1}{3} \Leftrightarrow |x|<\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

άρα η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow 1-3x^2<0 \Leftrightarrow x^2>\frac{1}{3} \Leftrightarrow |x|>\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x>\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ή } x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

άρα η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

Οπότε έχει 2 σημεία καμπής: $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ δηλ. $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ και

$\Gamma\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ δηλ. $\Gamma\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	Σ.Κ.	$\frown$	

B3. Αφού η f είναι συνεχής στο R δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{d'H}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x^2+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{d'H}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{6x}=0=\lambda$$

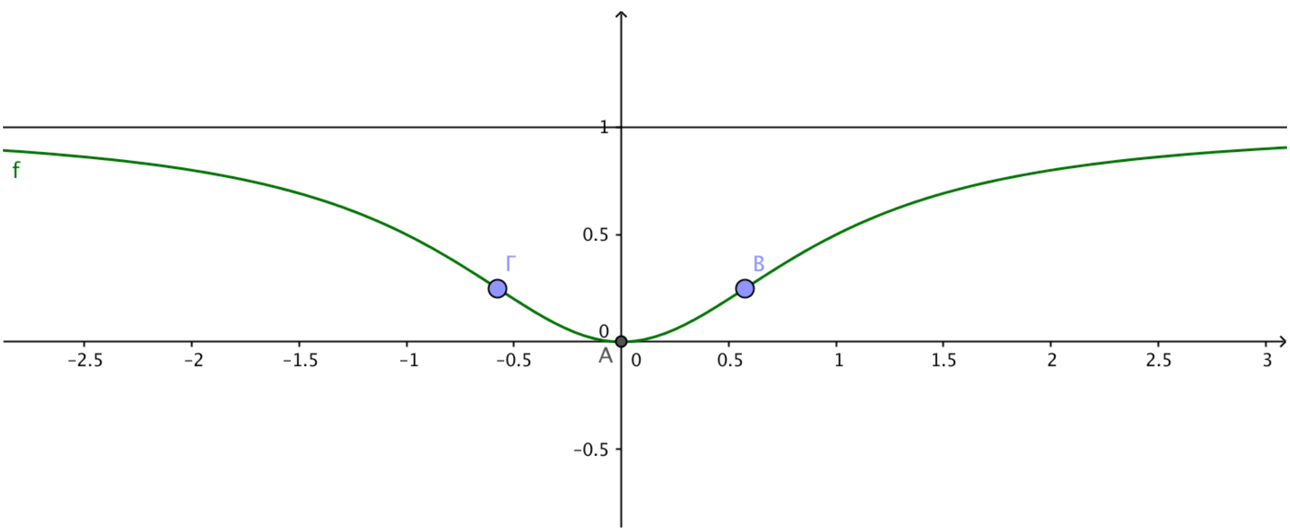
$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x^2+1}-0\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1=\beta \qquad \left(\text{αφού } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\right)$$

Άρα η y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Ομοίως, η y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

B4. Από τα προηγούμενα ερωτήματα, βρήκαμε ότι η C_f έχει ένα ολικό ελάχιστο στο A(0,0) και δύο σημεία καμπής, τα $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ και $\Gamma\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$. Επίσης, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ και $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$, έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}/3$		0		$\sqrt{3}/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$+$		$+$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	Γ	$\searrow$	A	$\nearrow$	B	$\nearrow$	1



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $g(x)=e^x-x-1$, D_f=R.

Η g είναι συνεχής στο R, ως διαφορά πολυωνυμικής από εκθετική.

Παρατηρούμε ότι g(0)=0

$g'(x)=e^x-1$

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$
- $g'(x)>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$
- $g'(x)<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘		↗
		ΕΛ. (0,0)	

Οπότε έχουμε:

- για $x>0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)>g(0) \Leftrightarrow g(x)>0$
- για $x<0 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x)>g(0) \Leftrightarrow g(x)>0$

Άρα η g έχει μοναδική ρίζα το 0, οπότε $e^{x^2}-x^2-1=0 \Leftrightarrow g(x^2)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Γ2. $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$, x∈R

Η συνάρτηση $h(x)=e^{x^2}-x^2-1$, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα έχει μοναδική ρίζα το 0, οπότε ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$. Έτσι, αφού η f είναι συνεχής, έχουμε ότι διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

- Για $x\in(-\infty,0)$: $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$ για κάθε x<0 ή $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$ για κάθε x<0
- Για $x\in(0,+\infty)$: $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$ για κάθε x>0 ή $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$ για κάθε x>0
- f(0)=0

άρα $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0 \\ -e^{x^2}+x^2+1, & x<0 \end{cases}$ ή $f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1, & x\geq 0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \end{cases}$

ή $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$ για κάθε x∈R

ή $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$ για κάθε x∈R

Γ3. $f(x)=e^{x^2}-x^2-1, \quad x\in R$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων: $-x^2-1$ πολυωνυμική και e^{x^2} ως σύνθεση πολυωνυμικής με εκθετική), με $f'(x)=2xe^{x^2}-2x$ και η f' είναι αντίστοιχα συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-2$.

Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο Γ με

$$f'''(x)=8xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}+4xe^{x^2}=8x^3e^{x^2}+12xe^{x^2}=4xe^{x^2}\left(2x^2+3\right)$$

$f'''(x)=0 \Leftrightarrow 4xe^{x^2}\left(2x^2+3\right)=0 \Leftrightarrow x=0$, αφού $e^{x^2}>0$ και $2x^2+3>0$

$f'''(x)>0 \Leftrightarrow x>0, \qquad f'''(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$\searrow$	Ελ. (0,0)	$\nearrow$

Άρα η $f''(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, δηλ. $f''(x)\ge f''(0)\Leftrightarrow f''(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\Gamma$ και $f''(x)=0$ μόνο για x=0 με f'' συνεχής στο $x_0=0$.

Άρα η f είναι κυρτή.

Γ4. $f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)=f(x+3)-f(x) \quad (2)$

Έστω $h(x)=f(x+3)-f(x)$

Η h παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων (f(x) παραγωγίσιμη και $f(x+3)$ σύνθεση πολυωνυμικής με παραγωγίσιμη)

$h'(x)=f'(x+3)\cdot(x+3)'-f'(x)=f'(x+3)-f'(x)$

όμως η f είναι κυρτή, άρα η f' γνησίως αύξουσα και x+3>x για κάθε $x\ge 0$

άρα $f'(x+3)>f'(x)\Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0\Leftrightarrow h'(x)>0$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα οπότε και 1-1

Έτσι, $(2)\Leftrightarrow h\left(|\eta\mu x|\right)=h(x)\overset{h:\,1-1}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|=x \quad (3)$

Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in R$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=0

Έτσι, η μοναδική λύση της (3) είναι: x=0

ΘΕΜΑ Δ

Έχουμε από την εκφώνηση:

- $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)ημx dx = π \quad (1)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{ημx} = 1 \quad (2)$
- $e^{f(x)} + x = f\left(f(x)\right) + e^x \quad (3) \quad \forall x \in R$
- f συνεχής ως παραγωγίσιμη

Δ1. Θέτοντας $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = x\cdot g(x) \quad (4)$

δηλαδή από τη (2) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot g(x)\right) = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\int_0^{\pi} f(x)ημx\,dx + \int_0^{\pi} f''(x)ημx\,dx = π \Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)ημx dx + \left[f'(x)\cdot ημx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)συνx dx = π \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\int_0^{\pi} f(x)ημx dx} + f'(π)\cdot \cancelto{0}{ημπ} - f'(0)\cdot \cancelto{0}{ημ0} - \left[f(x)συνx\right]_0^{\pi} - \cancel{\int_0^{\pi} f(x)\cdot ημx dx} = π \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left(f(π)\cdot συνπ - f(0)\cdot συν0\right) = π \Rightarrow f(π) = π$$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} \overset{(4)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ άρα $f΄(0) = 1$

Δ2. α) Παραγωγίζοντας τη σχέση (3) έχουμε:

$$e^{f(x)}\cdot f'(x) + 1 = f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x) + e^x \quad (5)$$

Έστω ότι η f έχει ακρότατο στο $x_0 \in R$. Τότε, αφού η f είναι παραγωγίσιμη, από το θεώρημα Fermat ισχύει: $f'(x_0) = 0$

Έτσι, από τη σχέση (5) για $x=x_0$:

$$e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0) + 1 = f'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Rightarrow 1 = e^{x_0} \Rightarrow x_0 = 0 \quad \text{άτοπο, αφού } f'(0) = 1$$

Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R.

β) από (α) έχουμε $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in R$

Επίσης $f'(x)$ συνεχής (ως παραγωγίσιμη), άρα η f ΄ διατηρεί πρόσημο στο R

Αφού $f'(0) = 1 > 0$, έχουμε $f'(x) > 0 \quad \forall x \in R$

Συνεπώς, αφού η f συνεχής στο R, τότε είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3. Ισχύει ότι $-1 \le ημx \le 1$ και $-1 \le συνx \le 1$ άρα με πρόσθεση κατά μέλη: $-2 \le ημx + συνx \le 2$

Έτσι: $\left|\dfrac{ημx+συνx}{f(x)}\right| \le \dfrac{2}{|f(x)|} \Leftrightarrow \left|\dfrac{ημx+συνx}{f(x)}\right| \le \dfrac{2}{f(x)}$ (6)

διότι f(x)>0 κοντά στο $+\infty$ (αφού f γνησίως αύξουσα και f(π)=π>0 άρα για x>π $\Rightarrow$ f(x)>f(π) δηλ. f(x)>π>0).

Επίσης, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα και f(R) = R, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)} = 0$

Από την (6) έχουμε: $-\dfrac{2}{f(x)} \le \dfrac{ημx+συνx}{f(x)} \le \dfrac{2}{f(x)}$

και σύμφωνα με τα παραπάνω $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{f(x)}\right) = 0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ημx+συνx}{f(x)} = 0$$

Δ4. $1 \le x \le e^{π} \Rightarrow \ln 1 \le \ln x \le π \Rightarrow 0 \le \ln x \le π \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0) \le f(\ln x) \le f(π) \Rightarrow 0 \le f(\ln x) \le π$

$\overset{x>0}{\Rightarrow} 0 \le \dfrac{f(\ln x)}{x} \le \dfrac{π}{x}$ {με το = να ισχύει μόνο για x=1, x=$e^{π}$}

Άρα* $\displaystyle\int_1^{e^{π}} 0\,dx < \underbrace{\int_1^{e^{π}} \frac{f(\ln x)}{x}dx}_{I} < \int_1^{e^{π}} \frac{π}{x}dx \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < I < π\left[\ln x\right]_1^{e^{π}} \Rightarrow 0 < I < π\cdot\left(\ln e^{π} - \ln 1\right) \Rightarrow 0 < I < π\cdot(π - 0) \Rightarrow 0 < I < π^2$

* Αν f(x) ≤g(x) τότε ισχύει $\int_α^β f(x)dx \le \int_α^β g(x)dx$

Απόδειξη: f(x)≤g(x) ⇔ g(x)-f(x)≥ 0 $\Rightarrow \int_α^β [g(x) - f(x)]dx \ge 0 \Rightarrow \int_α^β g(x)dx - \int_α^β f(x)dx \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_α^β g(x)dx \ge \int_α^β f(x)dx$