

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ &
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (02/06/2025)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Απόδειξη - σχολικό βιβλίο σελ. 186
 A2. Διατύπωση θεωρήματος σελ.76 (σχολικό βιβλίο)
 A3. Ορισμός σελ.161 σχολικού βιβλίου
 A4.
 α) Σωστό
 β) Σωστό
 γ) Λάθος
 δ) Λάθος
 ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f έχει πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε αυτό ως πολωνυμική.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$$

Αφού έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$ έχουμε (Fermat):

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow 2a + 12 = 0 \Leftrightarrow a = -6$$

B2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	⊖	⊖	+
$f(x)$				

T.M.

T.E.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, οπότε

$$\Delta_1 = f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [-3, 1] \text{ αφού } f(0) = -3 \text{ και } f(1) = 1.$$

Επειδή $0 \in \Delta_1$, η f θα έχει ρίζα στο $(0, 1)$ η οποία θα είναι μοναδική (διότι f γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό).

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[1,3]$, οπότε $\Delta_2 = f([1,3]) = [-3, 1]$ αφού $f(3) = -3$ και $f(1) = 1$. Επειδή $0 \in \Delta_2$, η f θα έχει ρίζα στο $(1, 3)$ η οποία θα είναι μοναδική (διότι f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό)
- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$, οπότε $\Delta_3 = f([3, +\infty)) = [-3, +\infty)$ αφού $f(3) = -3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$. Επειδή $0 \in \Delta_3$, η f θα έχει ρίζα στο $(3, +\infty)$ η οποία θα είναι μοναδική (διότι f γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό)

Άρα η f έχει ακριβώς μία θετική λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1), (-3,1), (-3, +\infty)$, δηλαδή έχει ακριβώς 3 θετικές ρίζες.

B3. $f'(x) = 3x^2 - 12 + 9$ παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο $D_{f'} = \mathbb{R}$ με $f''(x) = 6x - 12$
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$ και $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$ δηλαδή η f είναι κυρτή στο $(2, +\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty, 2)$.

Στο $x_0 = 2$ έχει σημείο καμπής το $M(2, f(2))$, δηλαδή $M(2, -1)$ αφού $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 3 = -1$.

B4. $g(x) = x + f(x)$

$g'(x) = 1 + f'(x)$ άρα $g'(\xi) = 1 + f'(\xi)$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A είναι:

$$\varepsilon_1 : y - f(\xi) = f'(\xi) \cdot (x - \xi)$$

Για $x = 0$: $y - f(\xi) = -\xi \cdot f'(\xi) \Leftrightarrow y = f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο B είναι:

$$\varepsilon_2 : y - g(\xi) = g'(\xi) \cdot (x - \xi)$$

Για $x = 0$: $y - g(\xi) = g'(\xi)(-\xi) \Leftrightarrow y - (\xi + f(\xi)) = -\xi(1 + f'(\xi))$

$$\Leftrightarrow y - \xi - f(\xi) = -\xi - \xi \cdot f'(\xi) \Leftrightarrow y = f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi)$$

Άρα οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ έχουν κοινό σημείο στον y το $\Sigma(0, f(\xi) - \xi \cdot f'(\xi))$

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. f(0) = \sqrt{0^2 + 0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \eta\mu x) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$\Gamma 2$. Από $\Gamma 1$, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων ($\eta\mu x$ συνεχής ως τριγωνομετρική και η e^x ως εκθετική). Στο $(0, +\infty)$: $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ συνεχής ως ρίζα συνεχούς συνάρτησης ($x^2 + x$ συνεχής ως πολυωνυμική).

➤ Αφού $D_f = \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν θα έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{1 + 0} = 1 \quad \text{άρα } \lambda = 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{άρα } \beta = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Οπότε η ευθεία $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta \Rightarrow y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = 0, \quad \text{διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0 \quad (\text{χρειάζεται απόδειξη} -$$

βλέπε ΑΡΤΙΟ ΒΑΣΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ σελ.79) και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0$

διότι :

α' τρόπος: $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Rightarrow -e^x \leq e^x \eta\mu x \leq e^x$ και αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, από κριτήριο παρεμβολής, έχουμε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0$.

β' τρόπος: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \cdot e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$$

Άρα η ευθεία $\eta : y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Γ3. Αρκεί να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) - x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$, όπου

$h(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-\pi, 0)$.

- η συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

- $h(0) = f(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$ και

$$h(-\pi) = f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = e^{-\pi} \cdot \eta\mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0, \text{ δηλαδή } h(-\pi) \cdot h(0) < 0$$

Άρα (Θ. Bolzano) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-\pi, 0) : h(x_0) = 0$.

Γ4. Έστω $M(x(t), y(t))$, $t \geq 0$, $x(t) \geq 0$ και $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$

$$y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot (2x(t) \cdot x'(t) + x'(t)) = \frac{(2x(t) + 1)x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}.$$

Εξετάζουμε αν υπάρχει $t_0 \geq 0$, τέτοιο ώστε $y'(t_0) = x'(t_0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x(t_0) + 1) \cdot x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = x'(t_0) \stackrel{x'(t_0) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \stackrel{x(t_0) \geq 0}{\Leftrightarrow} (2x(t_0) + 1)^2 = (2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4(x^2(t_0) + x(t_0)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 0, \text{ άτοπο}$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 που να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ερωτήματος.

ΘΕΜΑ Δ

f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ άρα και συνεχής

$$\square F'(x) = f(x) \quad (1)$$

$$\square \text{ Για } x > 0: \quad x \cdot f(x) = 2f(x) \cdot \ln x \quad (2)$$

$$\square \lambda_{\varepsilon} = 2 \text{ οπότε } f'(1) = 2 \quad (3)$$

Δ1. $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln(x \ln x)}} = \frac{F(x)}{e^{(\ln x)^2}}$ είναι συνεχής για κάθε $x > 0$ ως πηλίκo συνεχών

συναρτήσεων ... και παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{F'(x)e^{(\ln x)^2} - F(x)e^{(\ln x)^2}((\ln x)^2)'}{(e^{(\ln x)^2})^2} = \frac{f(x)e^{(\ln x)^2} - F(x)e^{(\ln x)^2}2\ln x \frac{1}{x}}{(e^{(\ln x)^2})^2} = \\ &= \frac{e^{(\ln x)^2} \cdot [xf(x) - 2F(x)\ln x]}{(e^{(\ln x)^2})^2 \cdot x} = \frac{xf(x) - 2F(x)\ln x}{x \cdot e^{(\ln x)^2}} = 0, \text{ σύμφωνα με τη σχέση (2)} \end{aligned}$$

Άρα η $g(x)$ είναι σταθερή

Δ2. i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, αφού f συνεχής

Από τη σχέση (2) για $x = 1$ έχουμε: $f(1) = 0$

Άρα το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$

Με τον κανόνα d' Hospital: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x \cdot f'(x)) \stackrel{(*)}{=} f'(1) \stackrel{(3)}{=} 2$

(*) Η f' είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων:

παραγωγίζοντας τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(x) + x \cdot f'(x) = 2f(x) \cdot \ln x + \frac{2F(x)}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2f(x) \cdot \ln x}{x} + \frac{2F(x)}{x^2} - \frac{f(x)}{x} \quad (4)$$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2F(x) \cdot \ln x}{x}}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2F(x)}{x} = 2F(1)$, αφού F συνεχής ως παραγωγίσιμη.

Όμως από (i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 2$, άρα έχουμε: $2F(1) = 2 \Leftrightarrow F(1) = 1$

Β' τρόπος: Από τη σχέση (4) για $x=1$ έχουμε $f'(1) = 0 + \frac{2F(1)}{1^2} - \frac{f(1)}{1} \Leftrightarrow 2 = 2F(1) \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} F(1) = 1$

➤ Από Δ1 : $g(x) = c \Rightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Rightarrow F(x) = c \cdot x^{\ln x}$

για $x = 1$: $F(1) = c \cdot 1 \Leftrightarrow c = 1$

Άρα $F(x) = x^{\ln x}$.

Δ3. $F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln(x^{\ln x})} = e^{(\ln x)^2}$ συνεχής και παραγωγίσιμη με $F'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$

για $x > 0$: $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $F'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Δηλαδή η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.

Στο $x_0 = 1$ έχει ελάχιστο το $F(1) = 1$

$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2$ (E)

Προφανής λύση της (E) η $x = 1$.

Εξετάζουμε αν υπάρχουν άλλες λύσεις της εξίσωσης στα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, +\infty)$:

- Αν $x > 1$ έχουμε

$x^2 > x > 1 \Rightarrow F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \stackrel{(E)}{\Rightarrow} -(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 0$

αδύνατο για $x > 1$

- Αν $0 < x < 1$ έχουμε

$0 < x^2 < x < 1 \Rightarrow F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \stackrel{(E)}{\Rightarrow} -(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 0$

αδύνατο για $x \in (0, 1)$

Άρα η $x = 1$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (E)

Δ4. $E = \int_1^e |F(x)| dx$

για $1 \leq x \leq e$, αφού F γν. αύξουσα, έχουμε $F(x) \geq F(1) \Rightarrow F(x) \geq 1$,

άρα $E = \int_1^e F(x) dx$ με $F(x) = e^{\ln^2 x}$

Ισχύει $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ (με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$) - εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (σελ. 148)

Θέτοντας όπου x το $e^{\ln^2 x} > 0$ έχουμε :

$$\ln(e^{\ln^2 x}) \leq e^{\ln^2 x} - 1 \Leftrightarrow \ln^2 x \leq F(x) - 1 \Leftrightarrow F(x) \geq \ln^2 x + 1 \quad (*)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $e^{\ln^2 x} = 1 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα $\int_1^e F(x) dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Rightarrow E > \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx \Rightarrow E > 2e - 3$, διότι:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad I &= \int_1^e \ln^2 x dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x 2 \ln x \frac{1}{x} dx = e \ln^2 e - 0 - \int_1^e 2 \ln x dx = \\ &= e - \int_1^e (2x)' \ln x dx = e - [2x \ln x]_1^e + \int_1^e 2x \frac{1}{x} dx = \\ &= e - (2e - 0) + [2x]_1^e = e - 2e + 2e - 2 = e - 2 \\ \blacksquare \quad \int_1^e 1 dx &= [x]_1^e = e - 1 \end{aligned}$$

(*) Β' τρόπος: $e^x \geq x + 1$ άρα $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$

$F(x) \geq \ln^2 x + 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$

