

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ &
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (03/06/2026)

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. σχολικό σελ. 133

A2. σχολικό σελ. 51

A3. σχολικό σελ. 182

A4.

- α) Λάθος
- β) Σωστό
- γ) Σωστό
- δ) Σωστό
- ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = 2\ln x(x-1) \text{ με } D_f = (1, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{x-2} + 1 \text{ με } D_g = [2, +\infty)$$

B1. Προσδιορισμός της συνάρτησης $h = f \circ g$

$$D_h = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$$

- $x \in D_g \Leftrightarrow x \geq 2$
- $g(x) \in D_f \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Άρα $D_h = (2, +\infty)$

$$h(x) = f(g(x)) = 2\ln((\sqrt{x-2} + 1) - 1) = 2\ln(\sqrt{x-2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x-2) = \ln(x-2)$$

Άρα, $h(x) = \ln(x-2)$ με $D_h = (2, +\infty)$

B2. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων

(πολ/κης και λογαριθμικής) με $h'(x) = (\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2}$

Επειδή $x > 2 \Rightarrow x-2 > 0$, ισχύει $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$.

Επομένως, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, άρα είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

$$\text{Θέτουμε } y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln(x-2) \Leftrightarrow e^y = x-2 \Leftrightarrow x = e^y + 2$$

Πρέπει $x > 2 \Leftrightarrow e^y + 2 > 2 \Leftrightarrow e^y > 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Το σύνολο τιμών της h (και πεδίο ορισμού της h^{-1}) είναι το \mathbb{R} , καθώς η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα με :

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) = +\infty$

Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $h^{-1}(x) = e^x + 2$, $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$

$$\text{B3. } \lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\ln(x-2) \cdot \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \right) = -\infty, \text{ διότι:}$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = -\infty \quad \{ \text{θέτουμε } x-2=u, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} u = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \}$$

$$\square \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \stackrel{D'H^*}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2\ln(x-1))'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{2-1} = 2$$

(* το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-1) = \ln 1 = 0,$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}, \quad \text{με } \kappa, \mu \in \mathbb{R}$$

Γ1. i) Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ που σημαίνει ότι το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} \text{ είναι πραγματικός αριθμός.}$$

$$\text{Αν } \kappa \neq 0, \text{ τότε : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\kappa x) = \begin{cases} +\infty, & \kappa > 0 \\ -\infty, & \kappa < 0 \end{cases} \quad \text{απορρίπτεται}$$

$$\text{Αν } \kappa = 0 : f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$$

$$\text{Για } \mu=0: \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ δεκτή}$$

$$\text{Για } \mu \neq 0: \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{x} = 0 \text{ δεκτή}$$

Άρα για $\kappa=0$ η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=0$

$$\text{ii) Με } \kappa = 0, \text{ η συνάρτηση γίνεται } f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$$

Η ευθεία (ε): $y = x$ εφαπτεται στην γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων $(0,0)$. Αυτό σημαίνει ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $x_0=0$ ισούται με 1 (δηλαδή $f'(0) = 1$) και $f(0) = 0$ (το οποίο ισχύει για κάθε τιμή του μ).

$$f'(x) = \frac{(\mu x)'(x^2 + 1) - (\mu x)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(x^2 + 1) - \mu x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu - \mu x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu - 0}{(0 + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$

Γ2. Μελέτη της $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $D_f = \mathbb{R}$ (ως ρητή) με $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται αποκλειστικά από τον αριθμητή $1 - x^2$, αφού ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Άρα

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

- Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = -1$ με τιμή $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$.

- Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 1$ με τιμή $f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$.

Επίσης, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$ (από Γ1)

και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Άρα το $f(1) = \frac{1}{2}$ είναι ολικό μέγιστο της f και το $f(-1) = -\frac{1}{2}$ ολικό ελάχιστο.

ii) Το σύνολο τιμών σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα είναι το $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Αναλυτικά:

- f γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty, -1]$ άρα

$$\Delta_1 = f((-\infty, -1)) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$$

- f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-1, 1]$ άρα

$$\Delta_2 = f([-1, 1]) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

- f γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα

$$\Delta_3 = f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = \left(0, \frac{1}{2} \right)$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{2} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι } f(D_f) = f(R) = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ } f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Αφού $\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε $\frac{1}{2} + \alpha^2 \geq \frac{1}{2}$

- Αν $\alpha = 0$ τότε θέλουμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $f(x) = \frac{1}{2}$

Η εξίσωση αυτή έχει μία μόνο ρίζα το $x = 1$ διότι το 1 ανήκει μόνο το Δ_2 :

Στο διάστημα $[-1, 1]$ η f παίρνει την τιμή 1 τουλάχιστον μία φορά.

Από προηγούμενο ερώτημα ξέρουμε ότι αυτό ισχύει για την τιμή $x = 1$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα (άρα και 1-1) στο $[-1, 1]$ δεν μπορεί να έχει άλλες λύσεις .

$1 \notin \Delta_1$ άρα η εξίσωση δεν έχει λύση στο $(-\infty, -1)$

$1 \notin \Delta_3$ άρα η εξίσωση δεν έχει λύση στο $(1, +\infty)$

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε $\frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2}$ άρα η $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ δεν έχει λύση αφού το $\frac{1}{2} + \alpha^2$ δεν ανήκει στο

$$f(D_f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} \Gamma 3. \text{ i) } I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2v+1} dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \frac{1^{2v+2}}{2v+2} - 0 = \frac{1}{2v+2} \end{aligned}$$

$$\text{ii) } I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$$

$$\text{Για } v = 0 \Rightarrow I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\text{Για } v = 1 \Rightarrow I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) + x$ η οποία είναι συνεχής στο $[-1, 0]$

$$\varphi(-1) = g(-1) - 1 < 0, \text{ αφού } g(x) < 1 \Rightarrow g(-1) < 1 \Rightarrow \varphi(-1) < 0$$

$$\varphi(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0, \text{ αφού } g(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Εφόσον $\varphi(-1) \cdot \varphi(0) < 0$, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$

τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.

Για τη μοναδικότητα :

Η φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x) = g'(x) + 1$

Δίνεται ότι $g'(x) \neq -1 \Rightarrow g'(x) + 1 \neq 0 \Rightarrow \varphi'(x) \neq 0$.

Επειδή η g' είναι συνεχής, η φ' είναι επίσης συνεχής στο $[-1, 0]$ και αφού δεν μηδενίζεται, έχουμε ότι η φ' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1, 0)$. Άρα ισχύει $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$ ή $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$, οπότε η φ είναι ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Σε κάθε περίπτωση η φ είναι γνησίως μονότονη (άρα και 1-1) και συνεπώς το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της στο $(-1, 0)$.

Παρατήρηση: Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα αν και δεν απαιτείται στο συγκεκριμένο ερώτημα

- *Α' τρόπος:* Αφού $\varphi(-1) < 0$ και $\varphi(0) > 0$, οπότε $\varphi(-1) < \varphi(0)$, η φ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ρίζα x_1 είναι μοναδική.
- *Β' τρόπος:* Αν η φ είναι γνησίως φθίνουσα θα ισχύει $x_1 < 0 \Rightarrow \varphi(x_1) > \varphi(0) \Rightarrow 0 > g(0)$ άτοπο (αφού $0 < g(0) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$). Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα

Δ2. Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της, πρέπει να είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 (g(x) + x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x(g(x) + x)] \stackrel{g \text{ συνεχής}}{=} 0 \cdot (g(0) + 0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa \right) = 2(1) + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

Άρα $3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$

Δ3. i) Αρκεί να δείξουμε ότι για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$: $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x \geq 0$

$$f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή θέτοντας $t = \sigma\upsilon\nu x$ (όπου $t \in (0, 1]$) για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$2t^3 - 3t^2 + 1 = (t - 1)^2 (2t + 1)$$

Συνεπώς $f'(x) = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 (2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Έχουμε:

- $\sigma\upsilon\nu^2 x > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$
- $(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 > 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$
- $0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα $1 < 2\sigma\upsilon\nu x + 1 < 3$

οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επίσης, η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$).

Άρα για κάθε $x \geq 0$ έχουμε $f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$

ii) $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$

- f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$
- $f(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = +\infty$, διότι

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x - 3x) = 2\eta\mu \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 2 - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\eta\mu x) = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1 > 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\sigma\upsilon\nu x) = 0, \sigma\upsilon\nu x > 0 \text{ για } x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$$

$$\text{Άρα } f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$$

$\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ άρα η εξίσωση έχει ρίζα $x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, η οποία θα είναι μοναδική στο διάστημα αυτό (αφού η f είναι γνησίως μονότονη).

$$\Delta 4. \text{ i) για } x \in [x_1, 0] : f(x) = x^2(g(x) + x) = x^2 \cdot \varphi(x)$$

Στο $\Delta 1$ δείξαμε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$x \geq x_1 \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(x_1) \Rightarrow \varphi(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$\text{ii) } f(x_2) = \frac{\pi}{3} \text{ (από } \Delta 3)$$

Το χωρίο Ω περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, την ευθεία $x = x_1$, $x_1 \in (-1, 0)$ και την ευθεία $x = f(x_2) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ και χωρίζεται από τον $y'y$ δηλαδή από την ευθεία $x=0$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία Ω_1, Ω_2 όπου

$$E(\Omega_1) = \int_{x_1}^0 |f(x)| dx \stackrel{\Delta 4i}{=} \int_{x_1}^0 f(x) dx \text{ και } E(\Omega_2) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} |f(x)| dx \stackrel{\Delta 3i}{=} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$$

$$\text{με } E(\Omega_1) = E(\Omega_2) \quad (1)$$

$$E(\Omega_1) = \int_{x_1}^0 x^2(g(x) + x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^0 = \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx - \frac{x_1^4}{4}$$

$$E(\Omega_2) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - \ln\left|\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}\right| - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{9} - (-2\sigma\upsilon\nu 0 - \ln|\sigma\upsilon\nu 0| - 0) =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 + \ln 1 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \text{ τετρ. μον.}$$

$$\text{Άρα (1)} \rightarrow \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \quad (2)$$

Έχουμε

$$\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = [x^3 \cdot g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 \cdot g(x) dx = -x_1^3 g(x_1) - 3 \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx =$$

$$\stackrel{(2)}{=} -x_1^3 g(x_1) - 3 \left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4} \right) =$$

$$\stackrel{g(x_1) = -x_1}{\Delta 1}{=} x_1^4 - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} - \frac{3}{4} x_1^4 = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3$$

